

## 受験数学コンクール 第 1 次予選

1  $x$  についての 4 次方程式

$$x = 2(2x^2 - a)^2 - a$$

が異なる 4 個の実数解をもつような実数  $a$  の範囲は,

$$a > \frac{\boxed{\text{(ア)}}}{\boxed{\text{(イ)}}}$$

である。

ただし, (ア), (イ) には互いに素である整数が入るものとし, (イ) は正の整数です。また,  $a > 3$  と入力場合は, (ア) に 3, (イ) に 1 を入れます。

答 (ア) 3, (イ) 8

2  $x$  についての 4 次方程式

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - ax + a = 0$$

が異なる 3 個の実数解をもつような実数  $a$  を求め, それらの和を求めると  $\boxed{\text{(ウ)}}$  であり, それらの 2 乗の和は  $\boxed{\text{(エ)}}$  である。

答 (ウ) -6, (エ) 20

3 数列  $\{a_n\}$  は次によって定められる。

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + (b_n)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし,  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は,

$$\sum_{k=1}^n b_k = n^2 + 3n + 5 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす。

このとき,  $a_1 + a_3 + a_7 + a_{15}$  の値を求めると  $\boxed{\text{(オ)}}$  である。

答 (オ) 5763

## 受験数学コンクール 第 2 次予選問題

1  $a$  を正の実数とする。関数

$$f(x) = x + a\sqrt{2x - x^2} \quad (0 \leq x \leq 2)$$

の最大値が 50 であるとき、 $a^2 = \boxed{\text{(ア)}}$  である。

答 (ア) 2400

2 5 個の整数の組  $(a, b, c, d, e)$  を考える。これらは、次の条件 (A) を満たす。

★ 条件 (A)

- どの数も 1 以上 4 以下の整数である。すなわち、

$$1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4, 1 \leq c \leq 4, 1 \leq d \leq 4, 1 \leq e \leq 4$$

である。

- $a < b, b < c, c < d, d < e$  うち成り立つのはちょうど 2 つである。

例えば、

$$(a, b, c, d, e) = (2, 4, 1, 3, 2), (2, 3, 2, 3, 2)$$

は条件 (A) を満たすが、

$$(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 4, 1), (4, 2, 3, 3, 1)$$

は条件 (A) を満たさない。

条件 (A) を満たす  $(a, b, c, d, e)$  の組は全部で  $\boxed{\text{(イ)}}$  通りある。

答 (イ) 456

3 実数  $x, y, z$  は、 $x^2 + y^2 + z^2 = 100$  を満たす。このとき  $xy + yz + zx$  の取り得る値の最大値を  $M$ 、最小値を  $m$  とすると、

$$M = \boxed{\text{(ウ)}}, m = \boxed{\text{(エ)}}$$

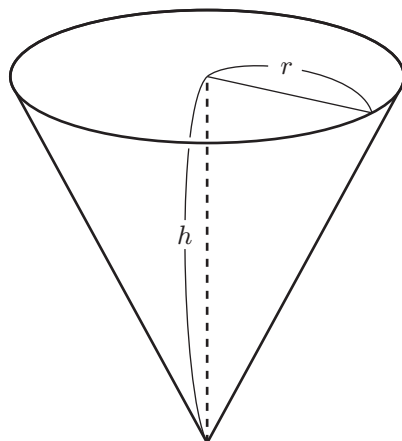
である。

答 (ウ) 100, (エ) -50

## 受験数学コンクール 第 3 次予選

1 次の図のような円すいを逆さにしたアイスを入れる容器を考えました。この容器は側面と上蓋が同じ材質でできています。暑い日に外で販売してもなるべく溶けにくくするために、中に入れるアイスの量を一定にしたまま表面積をなるべく小さくしたいと考えています。

上底面の円の半径を  $r$ 、高さを  $h$  とするとき、 $\frac{h}{r}$  をどのような値にするとよいでしょうか。



$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{\boxed{\text{(ア)}}}{\boxed{\text{(イ)}}} \quad (\text{既約分数の形で})$$

を教えてください。(ア), (イ) には正の整数が入ります。

答 (ア) 8, (イ) 1

2 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a+1) \left( \frac{a}{2a+1} \right)^{n-1}$$

の和が存在し、その和の値が 0 以上 20 以下になるような  $a$  の最大値を  $M$ 、最小値を  $m$  とするとき、

$$M = \frac{\boxed{\text{(ウ)}}}{\boxed{\text{(エ)}}}, \quad m = \frac{\boxed{\text{(オ)}}}{\boxed{\text{(カ)}}}$$

を求めてください。

(注)

$M = \frac{2}{3}$  のときは、「(ウ) は 2, (エ) は 3」のように既約分数の形で入れるものとします。また、 $M = 3$  のように整数の場合は、「(ウ) は 3, (エ) は 1」のように分母を 1 にします。さらに、 $M = -\frac{3}{2}$  の場合は、「(ウ) は -3, (エ) は 2」のように分母は正になるようにします。

答 (ウ) 19, (エ) 2, (オ) -1, (カ) 1

## 受験数学コンクール ファイナル問題

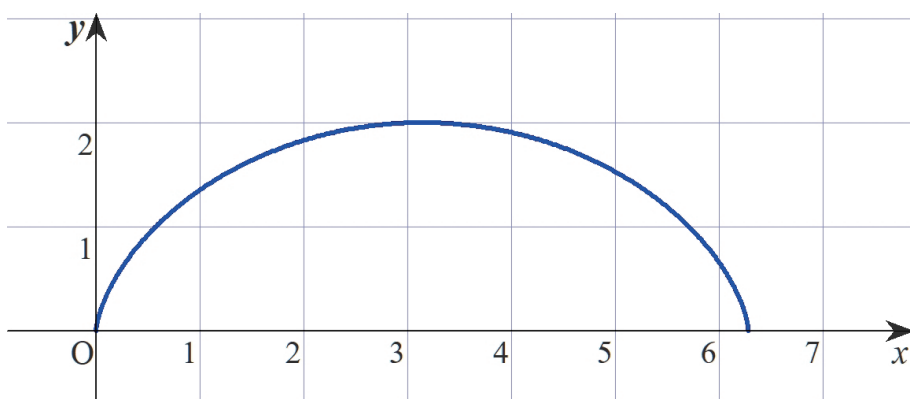
### 第 1 問 視力検査

- (1) 次の曲線の中から楕円半分であるものを選んでください。この答を ア とします。

A



B



この問題は 2 択です。A か B を選んでください。

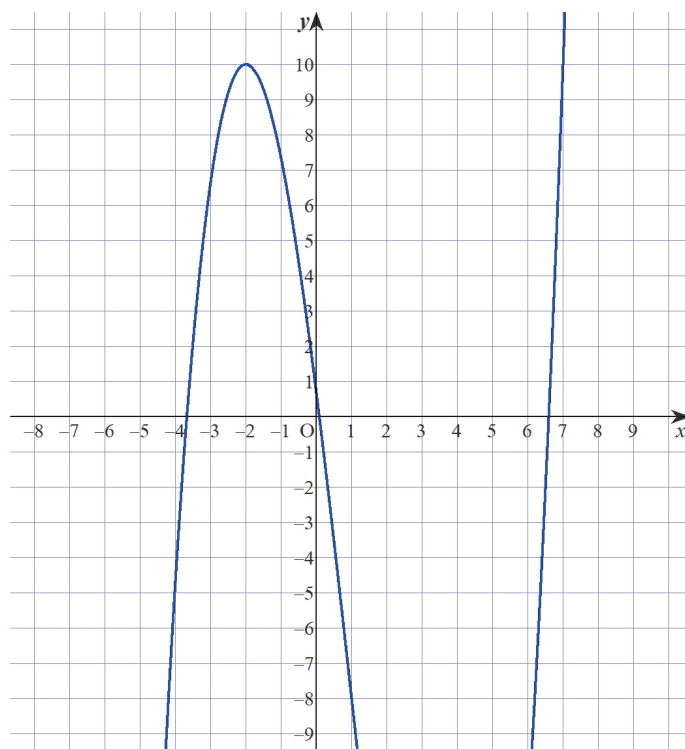
答 (ア) A



- (2) 次の図は 3 次関数  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  のグラフの一部を描いたものです。ここから,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  を求めてください。  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  は次の枠に入れます。

$$a = \frac{\boxed{\text{(イ)}}}{\boxed{\text{(ウ)}}}, \quad b = \boxed{\text{(エ)}}, \quad c = \boxed{\text{(オ)}}, \quad d = \frac{\boxed{\text{(カ)}}}{\boxed{\text{(キ)}}$$

各枠には整数 (負の整数も含む) が入ります。



$y = 2x^3 + x - 5x + \frac{3}{2}$  の場合は,

$a = 2, b = 1, c = -5, d = \frac{3}{2}$  なので,

(イ) 2, (ウ) 1, (エ) 1, (オ) -5, (カ) 3, (キ) 2  
が入ります。

答 (イ) 1, (ウ) 3, (エ) -1, (オ) -8, (カ) 2, (キ) 3

## 第 2 問 数学者を探せ

次のページ数式と関連が深い人物を選んでください。

(1)  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $a_1 = a_2 = 1$  (ク)

(2)  $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$  (2 名) (ケ)

(3)  $x^n + y^n = z^n$  ( $n \geq 3$ ,  $x, y, z$  は自然数) (コ)

(4)  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  (サ)

【画像群】 (数学者でない人もいます)

A



B



C



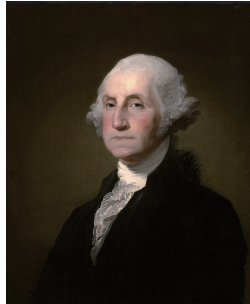
D



E



F



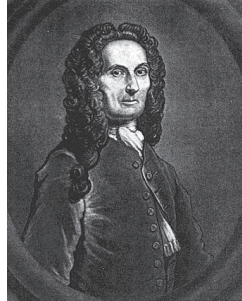
G



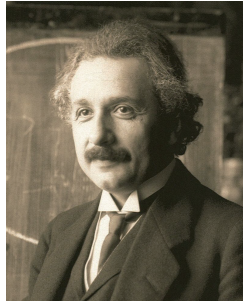
H



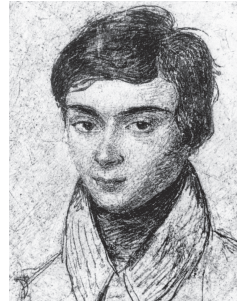
I



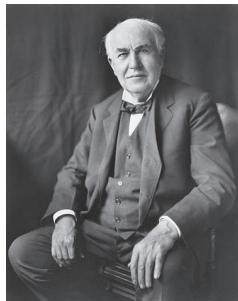
J



K



L



M



N



## 【画像の人物の発言】

- [A] 僕には小定理と大定理がある。大定理は最終定理とか呼ばれているようだ。
- [B] 私の実績で 21 世紀の高校生は積分を勉強しているはずなのに、21 世紀の高校生はニュートンの方ばかりを見ている。 $\frac{dy}{dx}$  とか  $\int dx$  などの記号は私の発明なのに。
- [C] 複素数平面なんて言わないで、私の名前と呼んでくれ。
- [D] 私は、あるジャンルの「父」と言われている。手に持っているものがヒントだ。
- [E] 多くの定理を発明したのに、20 世紀、21 世紀の高校生は私の名前を知らない。でも、数学 A に私の名前の定理が紹介されたおかげで少しだけ知ってもらえるようになった。
- [F] 2021 年には第 46 代、私は初代。都市の名前にもなった。
- [G] 私は、プーチンじゃないよ。19 世紀前半に複素解析で活躍した数学者さ。
- [H] 僕は、よくド・モアブルと間違えられる。僕の名は集合のときに出てくる。
- [I] 21 世紀の高校生は私の名前の入った定理を言うけれど、あれは実は私が考えたものじゃないんだ。大きな声で言えないけれど。(諸説あります。)
- [J] 私はドイツに生まれたが、ナチスを避けアメリカに移った。 $E = mc^2$  を知ってるかい？
- [K] こういう絵しかないのは、若くして倒れたから。でも、僕の手紙を元に後世の人は僕の名前の入った理論を構築してくれたようだ。
- [L] [D] は「父」と呼ばれているようだが、私は「王」と呼ばれているんだ。
- [M] 僕の名前は数学 B の数列で出てくることがあるよ。ウサギ？ うん。ウサギは好きだよ。
- [N] 21 世紀の高校生はさかんに私の名前を呼ぶが、実際私の顔なんて見たことがないなんてひどいなあ。顔くらい覚えておいてくれ。

答

- (1) (ク) M
- (2) (ケ) G, N
- (3) (コ) A
- (4) (サ) I

### 第 3 問 体積

次の不等式を満たす点  $(x, y, z)$  全体が作る立体の体積を  $V$  とおく。

$$\begin{cases} (2y - 2z)^2 + (z - 2x)^2 + (2x - y)^2 \leq 45 \\ 0 \leq x + 2y + 2z \leq 10 \end{cases}$$

このとき,

$$V = \frac{\boxed{\text{(シ)}}}{\boxed{\text{(ス)}}} \pi$$

である。

答 (シ) 50, (ス) 3