幸せ物語 10

第 1 話　目を覚まして発進!

無知であることは, しばしば人を「幸せ」な状態にします。できたと思っても実は全くできていない, でも本人はそれを全く知らない, あるいは勉強が捗っていると思っているが実はぜんぜん進んでいない, そんな状態の人を「幸せな人」と定義しましょう。これから, そんな幸せな人の物語が始まります。

****

人は自分の都合のよい情報には積極的に飛びつきますが, 逆に都合の悪い情報からは避ける傾向があります。「この公式は導ければよいから覚えなくていいよ」と言われた場合「覚えなくてよい」の部分だけを取り入れ, 肝心なときに使えないという経験はないでしょうか。「覚えてもいないし導くことも出来ない」になっていないかを今回の話の中でチェックしてみてください。

****

6 月の下旬です。世間はサッカーワールドカップの話で盛り上がっていましたが, 残念ながら PK で敗退も決まり, 幸福高校の 3 年 1 組では少しずつ落ち着きを取り戻してきました。幸助君, 頼子さんも少しずつ受験モードになりつつあります。実際, 高 2 までは昼休みとなると校庭に遊びに行っていた幸助君達ですが, 今は昼休みになると問題集を解いています。

★　　　　　　★

今日の昼休みも幸助君は数学の問題集の問題を解いているようですが, 何か困っている様子です。その様子に頼子さんが気がつきました。

幸助: うーん。また, これか。ええと ···

頼子: あれ? 幸助, 何を唸(うな)っているのよ。

幸助: いやぁ, さあ。また同じところで ···

頼子: 同じところって?

幸助: 三角関数の 3 倍角の公式だよ。先週のテストでも出てきたけどまた, 問題を解いてきていたら出てきてさ。

頼子: えー! 先週のテストのときも 3 倍角の公式なんて覚えておきなさいって証先生が言っていたでしょ。

幸助: でもさ, 一方で導ければよいという人もいるよ。

[後ろから日野君が話しかけてきました。]

日野: 幸助はさ, 3 倍角を覚えてもいないし, 導けもしないからだめなんじゃないのかい (笑)?

幸助: そんなことないよ。ええと, 3θ を $2\theta+\theta$ と見る。そして,

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\end{aligned}$$

とする。そして $\cdots$

頼子: そして? それからどうするの?

幸助: 2 倍角の公式を使って $\cdots$

頼子: それで?

幸助: ええと, 2 倍角の公式は $2\theta=\theta+\theta$ と見て $\cdots$

日野: え? もしかして, 幸助 2 倍角の公式も覚えていないの? ちょっとそれまずくない?

幸助: 導ければいいんじゃないのか?

[そのとき, 後ろから増成君が偉そうな態度でやってきました。]

増成: おいおい, 幸助よ。2 倍角の公式くらい導いているうちに覚えてしまうだろーが。

幸助: そういうものなのかなー。

増成: (あきれて) この時期に 2 倍角の公式を覚えていないようでは来年は無理だな。2 年計画で行けよ。当然, 模試の成績では俺には及ばない。はははー。

[そう言って, 増成君はその場から離れていきました。]

頼子: もう, 増成君って相変わらず嫌味ね。

[この一部始終を後ろの方で木場君が見ていました。]

木場: ふっー。うっせーな。覚えることは最小限でいいんだよ。

★ ★

5 時間目の開始を告げるチャイムが鳴りました。少したってから証先生が入ってきました。何かプリントを持っているようです。

証先生: 先週のテストですが, 皆さん 3 倍角の公式を覚えていないようですね。そして, 導こうとした人もいましたが, 最後まで到達しない人も多くいました。

木場: 先生! 3 倍角の公式って大事ですか?

証先生: 3 倍角の公式が三角関数の加法定理や 2 倍角の公式よりも重要というわけではありません。しかし, 3 倍角の公式そのものが問題なのではなく, 皆さんの中には, 数学に対する学習姿勢として, 基本的な公式まで「公式はその場で導ければいい」と考える幸せな人が多いのではないかと心配しているのです。

金本: 先生! でも, ある雑誌に載っていたのですが, ある大学の先生[1]が次のように言っていました。

「今の受験生は覚えることが多くて大変ですな。例えば, 2 次方程式の解の公式なんて一つ覚えればいいじゃないですか。つまり, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

だけで十分ですよ。

なのに, $ax^2+2b'x+c=0$ についても

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

何て覚えろというじゃないですか。私は覚えません。2 次方程式 $x^2+4x-1=0$ を解く場合も前者の公式を使います。前者で間に合うのですから。」

これってどうなんですか?

証先生: そうですね。その先生の言うことも一理あります。ただ, それは, 「時間制限のない世界」にいる研究者の言うことでもあるのです。

頼子: つまり, 時間制限がない場合は, 忘れたらその場で公式を導いたりすればよいけど, 時間制限のある場合は導いたりしている時間がもったいないということですね。

[1]京都大学の数学科の教授

証先生: ほぼそういうことです。でも, 「滅多に使わないもの」「覚えるのにかなり労力の使う複雑な公式」などは無理して覚える必要はないでしょう。

幸助: 3 倍角の公式はどうなのですか?

証先生: まあ, 受験する大学にもよりますが, 難関大を目指すくらいなら覚えていて欲しいものです。それに, 例えば次のような問題の場合は 3 倍角の公式を知っていないと解法が思いつかないなんていうこともあります。

「3 次方程式 $4x^3 - 3x = \cos 18^\circ$ を解け。ただし解は三角関数を用いて表してよい」

幸助: これどうするんですか?

証先生 $x = \cos\theta$ とおくのです。するとこの方程式は,

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 18^\circ$$

となりますが, 3 倍角の公式を知らないと左辺を $\cos 3\theta$ に直すことに気がつかないでしょう。

頼子: そうか, 左辺は 3 倍角の公式そのものですものね。

証先生: しかし, 私が心配していることは, 先ほども触れましたが,

「3 倍角の公式は導けばよいと思っていて, 覚えない。しかし, 実際の試験ではどうやって導いてよいのかわからなくなった。あるいは, 導く過程で計算ミスをした。結局導けなかった。」

のようにはならないかということです。

頼子: さっきの幸助ね。

証先生: よく塾なんかでも「こんなの覚えなくてもよいですよ」なんて耳ざわりのよいことばかりを言う人もいるようです。 実際にそうであることはもちろんあるのですが, 場合によっては学習者のためにはならないこともよくあるのです。何でも丸暗記をすればよいというものではないのですが, 楽な選択ばかりをしても試験場でやることが増えても本人のためにはならないのです。

日野: 3 倍角の公式くらいは覚えておけということですね。

増成: 俺は, 「覚えた」なんて意識なく頭の中に入るけどな。

幸助: $\cdots$

証先生: 他の例としては,

$\boxed{例 1}$ 商の微分公式を覚えるのが嫌で, 毎回 $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$ を $\left(f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ と見て, 積の微分公式と合成関数の微分公式を使って求めていた人

$\boxed{例 2}$ 三角関数の和積の公式で, 「導けばよいから覚えなくてよい」と考えたものの, 実際の試験場では導けなかった人

など, いろいろな人がいましたよ。

増成: ますます, さっきの幸助の例だな。ははは っ。

[増成君がからかうので, つい幸助君は強気になってしまいました。]

幸助: 大丈夫だよ。さっきの 3 倍角の話はたまたま。他のやつなら大丈夫さ。

[それを聞いた証先生はにこやかな顔をして言いました。]

証先生: まあ, 福森君, 頼もしいですね。では, 小テストをしましょう。

[証先生はもってきたプリント (次のページの「現状認識学力テスト (スピード編)」) を配り始めました。]

証先生: このテストはですね, 制限時間を短めにしてあります。公式は導ければよいと考える (それ自体は悪いわけではない) のならば本当に短時間で作り出せなければなりません。

「公式を覚えている」または「覚えていないけど, すぐに作れる」

のどちらかに当てはまっているかどうかを試す問題です。「試験場で公式は導けばいい」と思っていて, 実際にはそれができない, それが幸せな人ですよ。

制限時間は 10 分です。今回は答のみの解答でよいですからやってみてください。理系なら 7 題, 文系なら 5 題が目安です。

[証先生はプリントを配り終えました。]

幸助: げ, 何? これって時間制限短くない?

証先生: この制限でいいのですよ。公式を「覚える」にしても「導く」にしてもこの時間で終わるようになりたいですね。では始めてください。

[生徒達は解き始めました。]

現状認識学力テスト (スピード編)

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$ のとき, $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ.

(2) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\cos 3\theta$ の値を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$ を求めよ.

(4) $\sin 37.5^\circ\cos 7.5^\circ$ の値を求めよ.

(5) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ の最大値を求めよ.

(6) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x$ を求めよ.

(7) 方程式 $\dfrac{|x|}{2}+\dfrac{|y|}{3}=1$ で表される図形が囲む部分の面積を求めよ.

(8) 円 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ と直線 $3x+4y+k=0$ が接するような k の値を求めよ.

(9) 3 点 A(2, 4), B(3, 1), C(−1, 3) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ.

(10) 原点と点 A(2, 1, 2) を通る直線を l とする. ベクトル $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ を l 方向に正射影したベクトルを求めよ.

[注] (1), (3), (6) は数学 III の問題

証先生: (教室中に響く声で) はい!!! そこでやめてください。後ろから解答用紙を送ってください。

[教室の生徒達は一瞬ブルッと震えました。]

幸助: わーびっくりした。先生「はい!!!」という声大きいよ。

[証先生は幸助の言葉に反応しませんでした。]

頼子: 私, 8 題しか終わっていない!

月島: 柳谷君なんて 5 分くらいでもう手をおいていたよ。すごいね。

証先生: 簡単に説明しておきます。(1) はこの時期になっても「商の微分公式」を覚えない人がいるから出したのです。

幸助: 商の微分公式って?

頼子: え? やったでしょ。$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ っていうやつよ。

幸助: あっ, そうだった。

証先生: これは, 先ほども言いましたが, 面倒くさがって $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}\right)'$ を覚えない人がいるのです。試験場で急いでいるときここから導かなければならないのはよいことではありません。

日野: よかった。あっていた。

証先生: 次の (2) は, いつまでたっても 3 倍角の公式を覚えない人がいるから出しました。いつになっても $\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta)$ から始めなければならない人は結構ハンディを背負っていることになりますよ。

月島: ええと, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ よね。覚えていてよかった。

証先生: (3) も難関大を目指すのなら $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ を覚えていてほしいですね。

幸助: (4) はどうするのかな? ん? これは $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ を使うのかな?

増成: おいおい幸助よ。この問題って積を和に換える公式だろ。

$$
\begin{aligned}
\sin 37.5^\circ \cos 7.5^\circ &= \frac{1}{2}\{\sin(37.5^\circ + 7.5^\circ) + \sin(37.5^\circ - 7.5^\circ)\} \\
&= \frac{1}{2}(\sin 45^\circ + \sin 30^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{4}
\end{aligned}
$$

ってやるんだよ!

証先生: 積を和に変える公式は, 「導けばよいから覚えない, でもいざというときには導けない」人が多い公式なんです。

月島: (5) はどうなんですか?

証先生: (5) は「覚える」とか「導ける」という問題ではありません。緊迫した状況で平方完成に気がつくかどうかを試しました。

幸助: 平方完成?

証先生: そうです。

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

となるから, 最大値は $\dfrac{1}{4}$ です.

日野: (6) はどうするんですか?

証先生: これは, 極限の不定形においては「$\log x$ はつねに無視される」ことを覚えておいてほしいです。

月島: ということは, $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ ですね。

証先生: はい。それから (7) はこの方程式が表す図形が 4 点 $(2,0)$, $(0,3)$, $(-2,0)$, $(0,-3)$ を頂点とする四角形であることはすぐにわかってほしいです。

日野: ということは面積は 12 か。

証先生: そうです。(8) は円の中心と直線 $3x+4y+k=0$ の距離が半径 5 になる条件を求めてください. $k=-2\pm 5\sqrt{5}$ が得られるはずです。

(9) は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ である三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|\,ad-bc\,|$$

であることを覚えていればよいのです。この公式も他の面積を求める公式

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,|^2|\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

を知っていれば十分だから覚えなくていいやと考えて覚えない人が多いのです。

なお, 答は 5 になります。

幸助: (僕は両方とも知らなかったよ。)

証先生: (10) はベクトルの正射影の公式を使えばよいのですね。 $\dfrac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ になります。

[後ろの方でボソッと木場君が言っています。]

木場: なんだよ。数学って暗記かよ。

[それが聞こえたのか, 証先生は言いました。]

証先生: 今日の話は覚えることばかりのように聞こえますが, ある程度基本的なものについては覚えていないと試験場で行う作業が増えすぎてしまうから言っているのです。準備できるものは極力準備しておく方が, 特に数学の苦手な人には必要なんですよ。よく「覚えなくてもよい」とか「やらなくてもよい」という耳障りのよい, 都合のよい情報を集めて自分を納得させてしまう人がいますが注意してくださいね。

★ ★

証先生の話が一通り終わった後で 5 時間目が終わりました。

★ ★

帰り道に幸助君と頼子さんが歩きながら話をしています。

★ ★

幸助: 耳ざわりのよい話か。確かに楽な話を聞くとそっちにすがりつきたくなるしなあ。

頼子: もう 7 月だね。今年も半分が終わったわけだけど, 改めて気を引き締めていきましょ。

幸助: そうだなぁ。今まであまい夢を見ていたかもしれないけど, 目を覚まして本気で発進しよう。

★ ★

二人はコンビニポーソンの前で別れてそれぞれの帰路に着きました。

(幸せ物語　つづく)