幸せ物語　第 1 話　「幸せな人」と言われて

幸福高校の朝が始まりました。校門の近くで生徒達が登校しています。

解[1]: おっ, おはよう答子[2]。あっ, 月山[3]さんも一緒なのかい。

答子: あっ, 解。今日は早いね。先日, 遅刻したから反省したのね。

月山: おはよう。福島君。遅刻して証先生[4]に「あなたは幸せすぎます」って言われていたものね。ほめられたわけじゃないのよ。わかってる?

解: あのさぁ。もういいじゃん, その話はさ。それに何で僕が幸せな人なのかよくわからないよ。

金子[5]: おはよう。みんな。解, 証先生は「自分の置かれている立場がわかっていないで, 自分はなんともないと思っている人のこと」を「幸せな人」と言っているんだよ。特に, 数学の答案ではさ, 途中が出鱈目(でたらめ)でも最後の数値だけはあってしまうことあるじゃん。そんなとき, 本当はできていないのに「できた」と信じ続けている人とかさ, そう人を言っているみたいだけど。

解: それはわかっているけど。もう証先生に「幸せな人」だなんて言わせないよ。

★　　★

みんなは教室に入りました。教室では, 大成(おおなる)[6]君が大声で話をしています。

★　　★

大成: この前の証先生の出した問題だけどさぁ, あんなのやさしすぎるよなぁ。

土田[7]: 僕は, あまり自信がないなあ。大成君わかるの?

大成: あんな問題俺には物足りないよ。

---

[1]福島　解 (ふくしま　かい): 幸福高校 3 年 1 組の生徒。この物語の主人公。

[2]福本　答子 (ふくもと　とうこ):幸福高校 3 年 1 組の生徒。この物語の主人公。

[3]月山　素子 (つきやま　もとこ): 幸福高校 3 年 1 組の生徒。福本答子の親友。

[4]証　明子 (あかしあきこ): 幸福高校 3 年 1 組の担任で数学の先生。今年 30 歳になるらしい。生徒の面倒見もよく信頼も厚い。

[5]金子　実造 (かねこじつぞう): 幸福高校 3 年 1 組の生徒。福島解の親友。

[6]大成　試数人 (おおなるしすと): 幸福高校 3 年 1 組の生徒。数学には自信があり, 自分が一番よくできると思っている。

[7]土田　複太郎 (つちだふくたろう): 幸福高校 3 年 1 組の学級代表。まじめな性格。

(証先生が出した問題とは次のような問題でした。)

【問題 1 − 1】

k を実数とする. このとき, 2 次方程式

$$x^2 - 2(2+i)x + k + 4i = 0$$

が実数解をもつような k の条件を求めよ.

解: (大成のやつ, 相変わらずうるさくて偉そうだな。ようし,) 大成君, あんな問題簡単だよね。僕もできたよ。

大成: ふぅーん。どうやって?

★　★

そのとき, 教室に担任の証先生が入ってきました。出席をとって連絡事項を述べた後, 少したって 1 時間目の証先生の数学の授業が始まりました。

★　★

証先生: みなさんの中でこの前に出した問題ができた人いますか?

大成: (大きな声で) 先生。福島君ができたって言ってます。

解: (ん? また, 余計なことを $\cdots$)

証先生: では, 福島君。黒板に書いてみてください。

解: はい。

解君は次のような答案を黒板に書きました。

☆————☆

【解君の解答】

与えられた方程式の判別式を D とおく。このとき, 与えられた方程式が実数解をもつ条件は

$$\frac{D}{4} = (2+i)^2 - (k+4i) \geqq 0$$

$$\therefore\quad 3-k \geqq 0 \qquad \therefore\quad k \leqq 3 \qquad \cdots\cdots(答)$$

☆————☆

証先生の目は点になっていました。そのとき, 教室の中で笑っている声が聞こえました。大成君の笑い声です。

★　★

大成: 先生, 福島君は 2 次方程式の係数に虚数があるのに, 判別式使ってます。これって「最低」「最悪」ですよね。

答子: (大成君, 「最低」とか「最悪」まで言わなくても…。「最悪」って「最も悪い」って言う意味じゃない。)

証先生: そうですね。福島君の解答は判別式を使った段階で誤りです。大成君はできたのですか?

大成: もちろんです。じゃあ, 今度は僕が解答を黒板に書きます。

★　★

大成君は次のように書きました。

☆——————————————————☆

【大成君の解答】

与えられた方程式は

$$(x^2-4x+k)+(-2x+4)i=0$$

となるから, x が実数のとき x は (k も実数であるから)

$$x^2-4x+k=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$-2x+4=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

をともに満たす。

② より $x=2$ であるから, これを ① に代入して

$$2^2-4\cdot 2+k=0$$

$$\therefore \quad k=4 \qquad \cdots\cdots (答)$$

である。

☆——————————————————☆

証先生: ええ。これならよいでしょう。ところで, 大成君はなぜ判別式を使わなかったのですか?

大成: え? それは, 係数が実数ではないからです。

解: 先生, 係数が実数でなければ判別式を使ってはだめなのですか?

証先生: はい。係数が実数ではない場合は (判別式) $\geqq 0$ としても「2 次方程式が実数解をもつ」とはならないのです。ではなぜならないのですか? 大成君。

大成: え? それは決まっているからじゃないですか?

証先生: 「決まっている」とはどういうことですか?

大成: つまり, 「係数が実数ではない場合は, 判別式を使ってはいけない」と決まっているからではないですか。

証先生: 先生は大成君の言っている「決まっている」という意味がよくわかりません。「係数が実数ではない場合は, 判別式を利用して 2 次方程式が実数解をもつ条件は得られない」という事実は正しいのですが, それはだれかが決めたわけではありませんね。今はその理由を聞いているのですから。

大成: 先生, 数学なんて基本を覚えてそれを使えさえすればいいんじゃないですか? それでテストで点は取れるし。

証先生: 確かに簡単な試験では点がとれることもあるでしょう。でも, 個々の事実を暗記するだけでなく, 事実と事実の間の「関係」を理解する姿勢がないと数学の学習とはいえません。公式の「運用法」を覚えるだけでは数学の学習とはいえないのですよ。

このクラスには, まだまだ幸せな人が多くいるようですね。今日, あなた方がどれだけ幸せかを測る問題を用意して来ましたから各自「検査」しておいてください。

★ ★

1 時間目の終了をつげるチャイムが鳴りました。大成君は納得がいかない様子です。

証先生が配ったプリントは次のようなものでした。

【幸せ度チェック　(1)】

次の中で正しいと思うものを選びなさい。

(1)　1 は素数である。

(2)　1 は複素数である。

(3)　$a < b, c < d$ であれば $a + c < b + d$ である。

(4)　$a < b, c < d$ であれば $a - c < b - d$ である。

(5)　$a < b, c < d$ であれば $ac < bd$ である。

(6)　任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

が成り立つ。

(7)　$\vec{a} \neq \vec{0}$ とする。このとき,

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{y} \text{ であれば } \vec{x} = \vec{y}$$

である。

(8)　$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 t^2\,dt$ である。

(9)　$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 t^2\,dx$ である。

(10)　$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dt = \int_0^1 t^2\,dx$ である。

(解答は第 1 話の最後にあります。)

★　　　　★

昼休みに答子さんは後ろの席に座っている五線ねいろ[8]さんと話しています。

[8]五線　ねいろ (ごせんねいろ): 幸福高校 3 年 1 組の生徒。実は幸福高校で最もできる生徒であるが, 控えめな性格のためその事実はあまり知られていない。高 2 のときに駿台の公開模試で高 3, 高卒に混ざり全国で 25 位の成績であるが, 名前も匿名になっているためその事実はだれも知らない。ピアノがうまいことだけはよく知られている。

★　　　　　★

答子: ねぇ, ねいろちゃん。1 時間目の授業で途中で話が途切れたけど, なんで係数が実数でないと判別式は使っちゃだめなの? わかる? ねいろちゃん。

五線: うん。それはね, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (2 次方程式って言ってるから $a \neq 0$ よ) の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

だったでしょ。このとき, 判別式 D ってさ, 根号内のことでしょ。$D \geqq 0$ だったら $\sqrt{b^2-4ac}$ は実数になるから (a, b, c が実数であれば) 解 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ も実数って言えるよね。でもね, 例えば, b が虚数だったら $\sqrt{b^2-4ac}$ が実数だからといって $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ は実数って言える?

答子: あっ, そうか。せっかく $\sqrt{b^2-4ac}$ が実数だったとしても b が虚数だったら分子の $-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$ は虚数になるものね。

五線: そうなの。つまり, a, b, c が実数のとき, 「他から」は虚数が現れないことがわかっているから「$\sqrt{b^2-4ac}$ が実数かどうか」で全体 $\left(\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ のこと}\right)$ も実数であるといえるのよね。でも, a, b, c が実数とは限らないのであれば $\sqrt{b^2-4ac}$ だけからは解が実数になるかどうかは決まらないってことなの。

答子: ふぅーん。よくわかった。でも, a, b, c が虚数のとき解を「判別」できないのに「判別式」っていうのかなぁ。

五線: あのね。一般に n 次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

の判別式っていうのは (n は 2 以上の整数よ), n 次方程式の n 個の解を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とおくと

$$D=a_n^{2(n-1)}(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2\cdots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$$

のことをいうのよ。例えば,

[1] 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α, β とすると

(判別式)$=a^2(\alpha-\beta)^2$

[2] 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α, β, γ とすると

$$(\text{判別式})= a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

のことをいうの。

それで, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の場合は

$$(\text{判別式})= b^2-4ac$$

となって, 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の場合も解と係数の関係を使って計算していけば

$$(\text{判別式})= -4ac^3-27a^2d^2-4b^3d+b^2c^2+18abcd$$

が得られるの。どの場合も (つまり, 4 次方程式以上の場合も) 「(判別式) $=0 \Longleftrightarrow$ 重解をもつ」だけはいえることもわかると思うけど。

答子: へぇー。3 次方程式にも判別式があるなんて感動した。

五線: 数学の勉強ではね, 「2 次方程式に判別式があった。では, 3 次方程式には判別式はないのか。」と考えることは自然だと思うけど。解と係数の関係もそうよ。「2 次方程式には解と係数の関係があった。では, 3 次方程式, 4 次方程式, $\cdots$ には解と係数の関係はないのか」と考えることは自然だと思うけど。

答子: え? だったら, 5 次方程式にも「解と係数の関係」ってあるの?

五線: あるよ。ただ, 複雑で使いにくい式なので特別な場合以外はあまり問題としては出てこないけど。

答子: ふぅーん。話を元に戻すけど, 3 次方程式の判別式って覚えておかなければだめかなぁ。

五線: この 3 次方程式の判別式って覚えずらいでしょ。きっと覚えている人なんてほとんどいないと思うし, 覚える必要はないと思うわ。私はとりあえず覚えているけど。

一般の 3 次方程式の判別式は複雑だけど, 次の形のものなら覚えている人も少なくないのよ。

【3 次方程式の判別式】

3 次方程式 $x^3+mx+n=0$ の判別式を D とおくと

$$D=n^2+\frac{4m^3}{27}$$

である。

それでね, $D=0$ のときは 3 次方程式 $x^3+mx+n=0$ は重解をもつわけだけど, これって 3 次関数 $y=x^3+mx+n$ のグラフが x 軸に接している条件でもあるっていうのは納得できるでしょ。

答子: う, うん。まあ。でも, ねいろちゃんって実はよく知っているんだね。

五線: 前にちょっと本で読んだことあるだけよ。

(月山さんも会話に入ってきました。)

月山: ホント, ねいろちゃんってよく知っているけど, 知っているような態度でないから $\cdots$ 。これが大成君だったら大騒ぎだよ。きっと。

答子: (笑)

(近くで, 解君が悩んでいました。)

答子: 解! 何悩んでいるの?

解: いやぁ, 2 次方程式の判別式が実数係数でないと使えないということがわかったけど, だったら「解の公式」も係数が実数でないと使えないのかなぁ, なんて思ったりして。

答子: (小声で) ねいろちゃん。どうなの? 私も幸せな人かもしれないから教えて!

五線: 解の公式は係数が虚数でも大丈夫よ。式の変形の中で虚数だからできないということは特にないし。

でもね, 解の公式をそのまま使うと根号内に虚数が現れることもあるの。例えば, 2 次方程式

$$x^2-4x+(4-2i)=0$$

を解の公式を使って解くと, まず,

$$x=2\pm\sqrt{2i}$$

ってなるの。このままでも間違いではないけど,

$$\pm\sqrt{2i}=\pm(1+i)$$

のように根号内に虚数単位 i が出てこないように変形して, 解を

$$x=2\pm(1+i)$$
$$\therefore\quad x=3+i,\ 1-i$$

の形に表せと言われるかもしれない。でも，これは本質的に解の公式の問題じゃないから。
(ふぅー。今日の私はちょっとしゃべりすぎね。まあ，いいか。)

解: ん! いやぁ，僕もねいろちゃんと同じように考えていたところだからさ。は。は。

答子: 本当? ちょっと怪しいけど。でも，これから，「幸せな人」って言われないように頑張りましょう。

解: そうだね。(僕はもうすでに言われているけど。)

幸せ度チェックの解答

正しいものは

(2), (3), (8)

4 題以上間違えた人は「幸せな人」です。7 題以上間違えた人は「超幸せな人」です。

(幸せ物語　つづく)